

EXERCICE N°1

Pour x réel exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ chacun des réels suivants:

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x) + \sin(x - \pi) + \cos(\pi - x)$$

$$B = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(-x + 3\pi) + \sin(\pi + x)$$

$$C = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{17\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(3\pi + x) + \sin(x + 5\pi) + \sin x$$

$$E = \cos(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$F = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice N°2

1- Montrer que pour tous x et y réels on a :
 $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

2- En déduire que pour tout x réel on a :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

EXERCICE N°3

Pour x réel tel que:

$$1 + \sin 2x \neq 0, \cos 2x \neq 0 \text{ et } \cos x + \sin x \neq 0$$

$$1- \text{ Montrer que } \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

2- Pour $x = \frac{\pi}{8}$ et sans calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ déduire

$$\text{que: } \cot g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

3- Transformer alors en $r \cos(x - \phi)$ L'expression:

$$(1 + \sqrt{2}) \cos x + \sin x$$

EXERCICE N°4

1- Pour x réel tel que $-\pi < x < 0$ et $\cos(2x) = -\frac{3}{4}$

calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\text{tg} x$

2- On pose $A = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$

exprimer A en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

3- Pour $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On pose $B = \frac{2 \sin x + \sin 2x}{2 \sin x - \sin 2x}$,

montrer que $B = \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en déduire $\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4- Soit $f(x) = -1 + \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$

a) Transformer $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$ en $r \cos(2x - \phi)$

b) Montrer alors que $f(x) = 1 - 4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ déduire $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

EXERCICE N°5

1- Montrer que pour tout x réel on a : $4 \sin x \cos x \cos 2x = \sin 4x$

2- En déduire $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$



3- A l'aide de 2- Montrer que : $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

4- Vérifier que $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

5- Calculer les valeurs de $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$

Exercice N°6

1- Montrer que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

2- Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

1- Sachant que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$

2- Montrer que $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

Exercice N°7

1- Calculer $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$; $B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

2- Montrer les égalités suivantes

a) $4 \sin x \sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = \sin 3x$

b) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x$

Exercice N°8

Soient $S = \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})$ et $S' = \cos(\frac{3\pi}{5}) \cos(\frac{\pi}{5})$

1- Calculer $2S \sin(\frac{\pi}{5})$ en déduire les valeurs de S et S'

2- Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5}) \cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$ déduire $\cos(\frac{2\pi}{5})$

3- Soient $P_1 = \cos(\frac{\pi}{5}) \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $Q_1 = \sin(\frac{\pi}{5}) \sin(\frac{2\pi}{5})$

Calculer $P_1 Q_1$ et en déduire la valeur de P_1

4- Soient $P_2 = \cos(\frac{\pi}{7}) \cos(\frac{2\pi}{7}) \cos(\frac{3\pi}{7})$ et

$$Q_2 = \sin(\frac{\pi}{7}) \sin(\frac{2\pi}{7}) \sin(\frac{3\pi}{7})$$

Calculer $P_2 Q_2$ en déduire la valeur de P_2

Exercice N°9

1- Montrer que pour tout x réel on a :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$$

2- Déduire alors que : $\cos(\frac{5\pi}{12}) + \sqrt{3} \sin(\frac{5\pi}{12}) = 2 \cos(\frac{\pi}{18})$

3- Déduire donc $\frac{1}{\sin \frac{5\pi}{18}} + \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{5\pi}{18}} = 4$

4- Soit $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$

a) Vérifier que $f(x) = 2 \cos^2 x + 2 \sqrt{3} \cos x \sin x$

b) Montrer alors que $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6})$

c) Calculer de deux manières $f(\frac{\pi}{12})$. Déduire alors $\cos \frac{\pi}{12}$

5- Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{ \frac{\pi}{6} \}$ on considère $g(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}$

a) Montrer que $g(x) = \frac{\cos x}{2 \sin(x + \frac{\pi}{6})}$

b) Calculer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$. Déduire que

$$\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$$